

Bandstrukturen III: Berechnungen mit FP-LAPW-Methoden

(FP-LAPW-Methode (z.B. Wien2K))

AFP-Seminar, CR

- I. Einleitung: Elektronische Strukturen von Festkörpern ←
- ◇ Problemstellung
- ◇ Lösungen und deren Darstellung
 - für den eindimensionalen, potentialfreien Fall (PW)
 - 1-dim. Fall mit periodischem Potential (Bloch-Ansatz)
 - 2-dim. Fall
- ◇ Chemische Bindungen und Bandstruktur/Zustandsdichten
- II. Rechenverfahren
- III. Beispiele

Problem

- Lösung des Energieeigenwertproblems für ein System mit N Elektronen und M Kernen
- Born-Oppenheimer-Näherung erlaubt die Aufspaltung des Hamilton Operators nach

$$\hat{H} = \hat{T}_e + \hat{V}_{ee} + \hat{V}_{en}$$

- mit die Operatoren
 - ◇ der kinetischen Energie aller Elektronen

$$\hat{T}_e = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_e}$$

- ◇ der Coulomb-Wechselwirkung aller Elektronen untereinander

$$\hat{V}_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

- ◇ der Coulomb-Wechselwirkung aller Elektronen mit allen Kernen

$$\hat{V}_{en} = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^M \frac{Z_n e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n|}$$

- brutalste Näherung: keine e-e-WW, keine Kerne, 1-dimensionaler Fall
- \mapsto Teilchen im Kasten

Einteilchen, eindimensional, potentialfrei

- Eigenwertproblem reduziert sich auf:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - E\right)\psi(x) = 0$$

- Lösungen: E-Eigenwerte (Quantenzahl n , Kastenlänge L)

$$E = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$$

- mit der neuen Quantenzahl k (Unabhängigkeit von L !)

$$k = \pm \frac{2\pi}{L} n$$

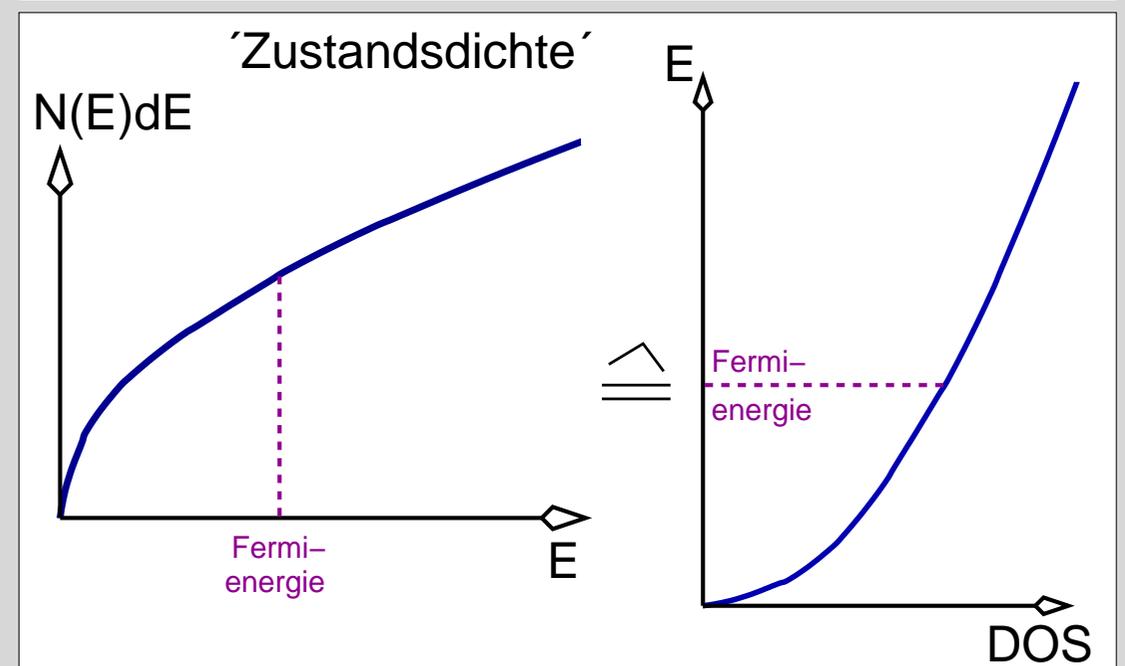
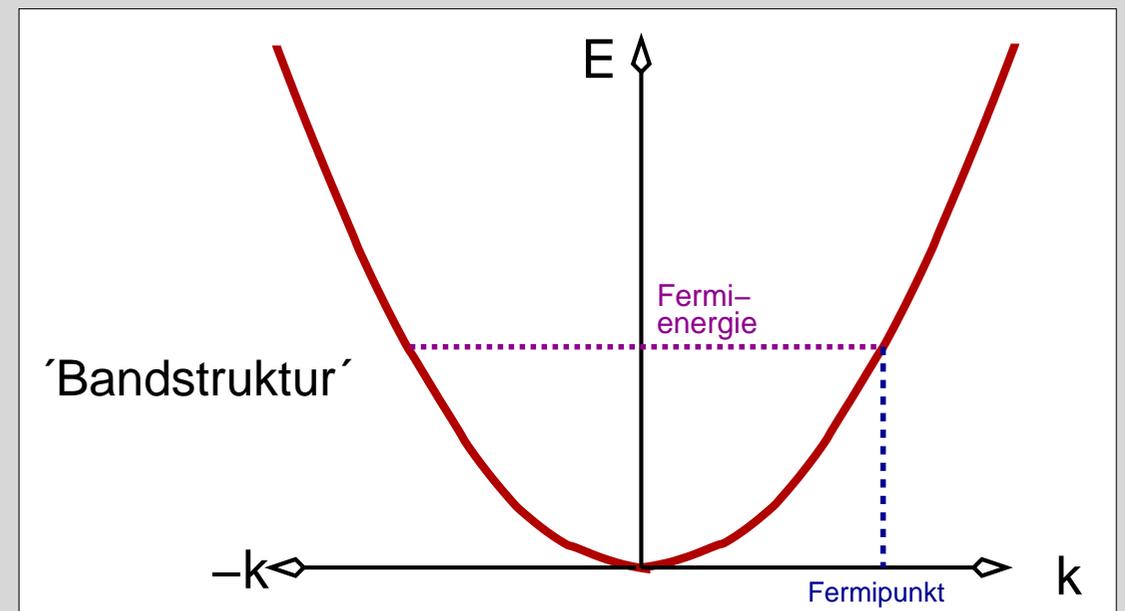
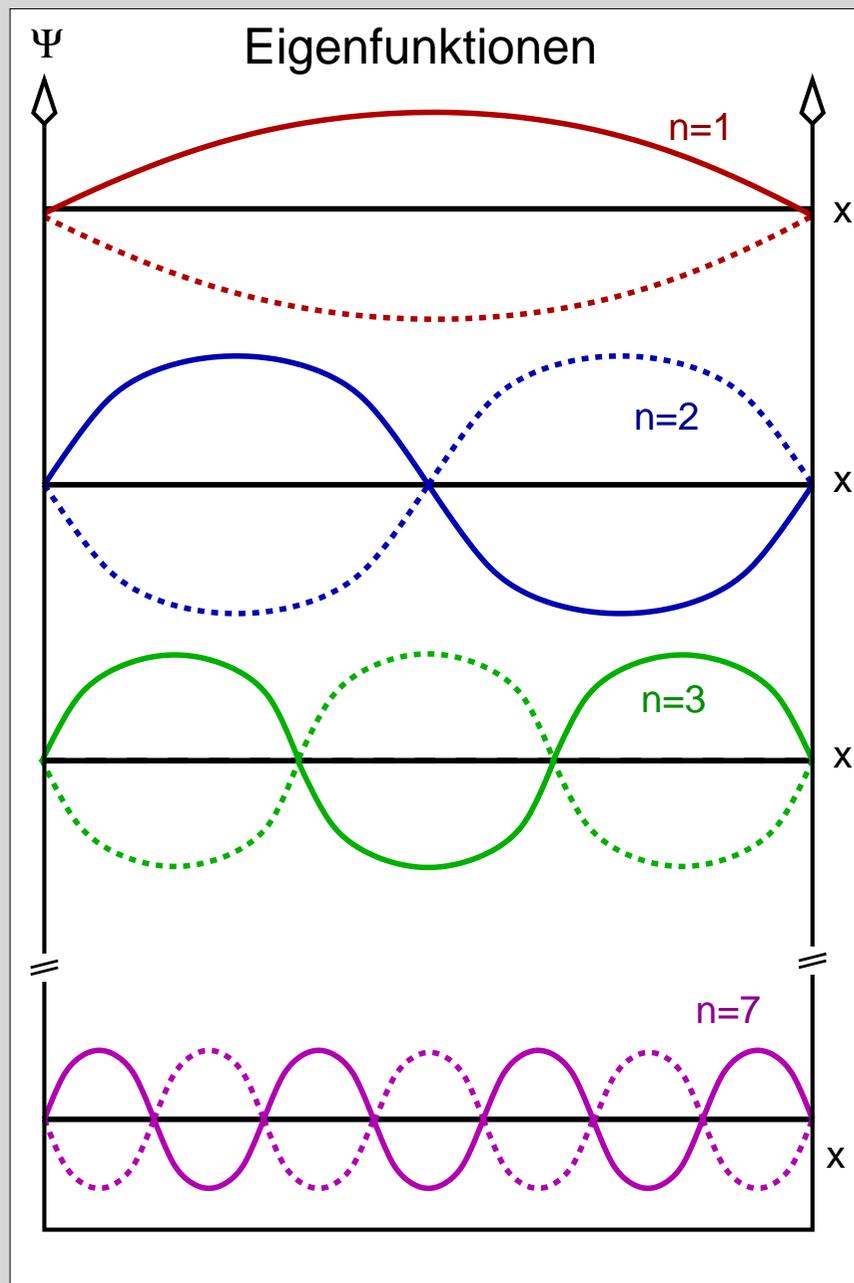
- folgt für die Energieeigenwerte:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

- Lösungen: Eigenfunktionen (zu den Eigenenergien $E(k)$), ebene Wellen, Plane Waves (PW)

$$\psi = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

eindimensional, potentialfrei: Darstellung der Lösungen (VL 6 oben)



Bedeutung von k

..... k

- ist eine Quantenzahl
- ist proportional zum Impuls der Elektronen

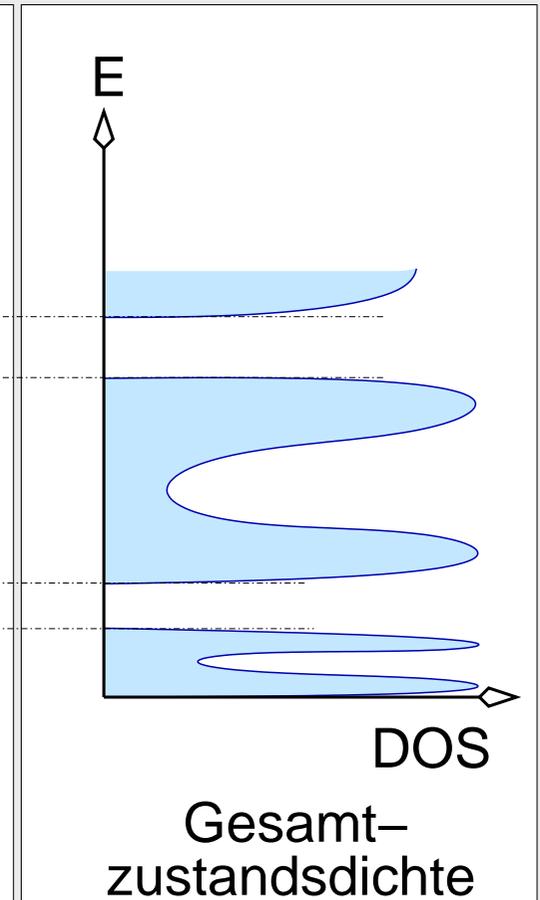
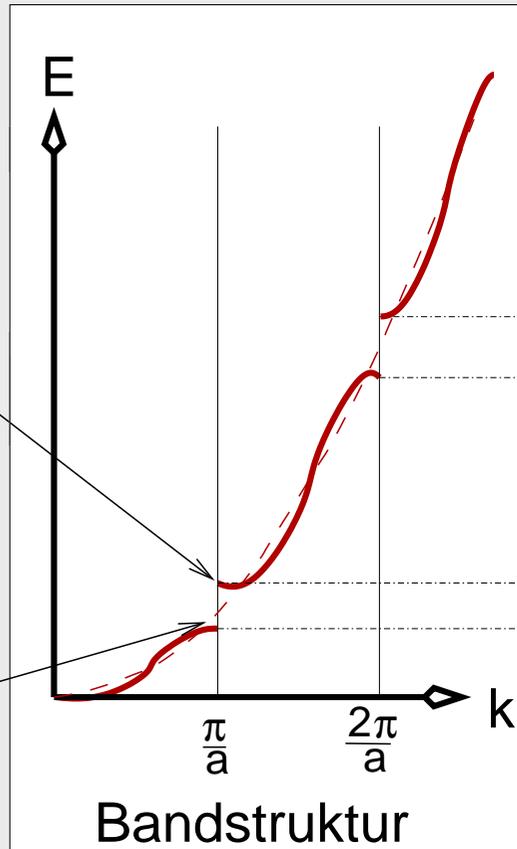
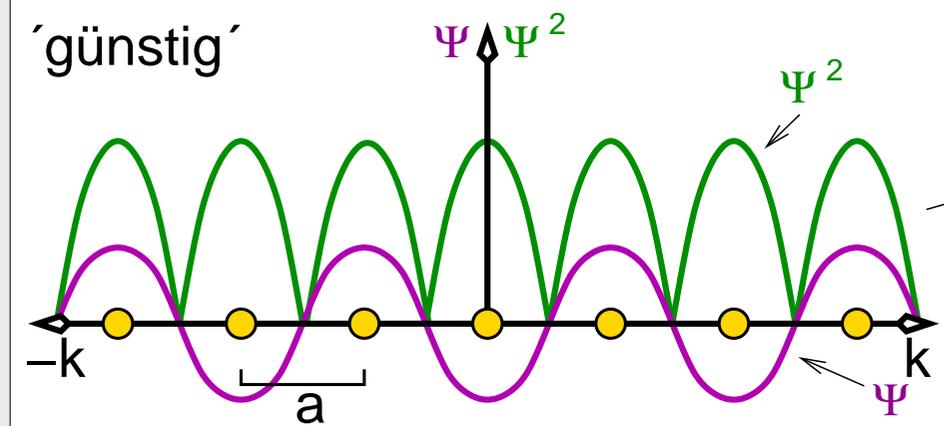
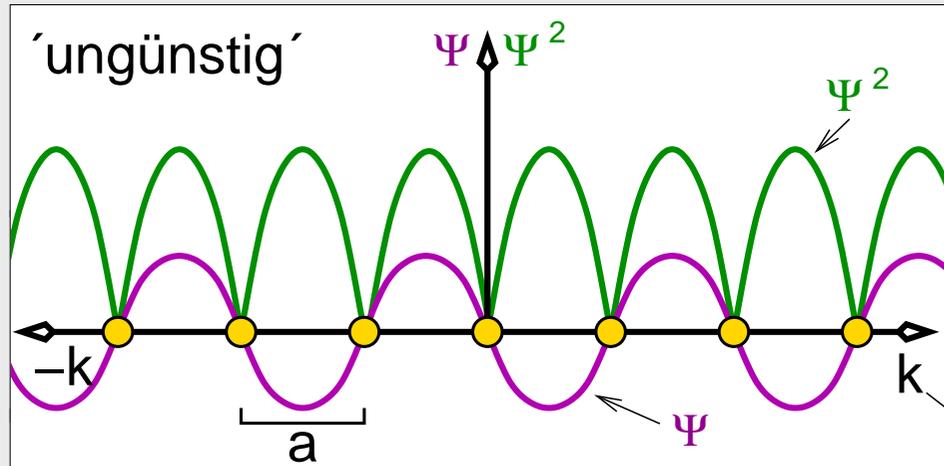
$$p = \hbar k$$

- ist umgekehrt proportional zur Wellenlänge der PW:

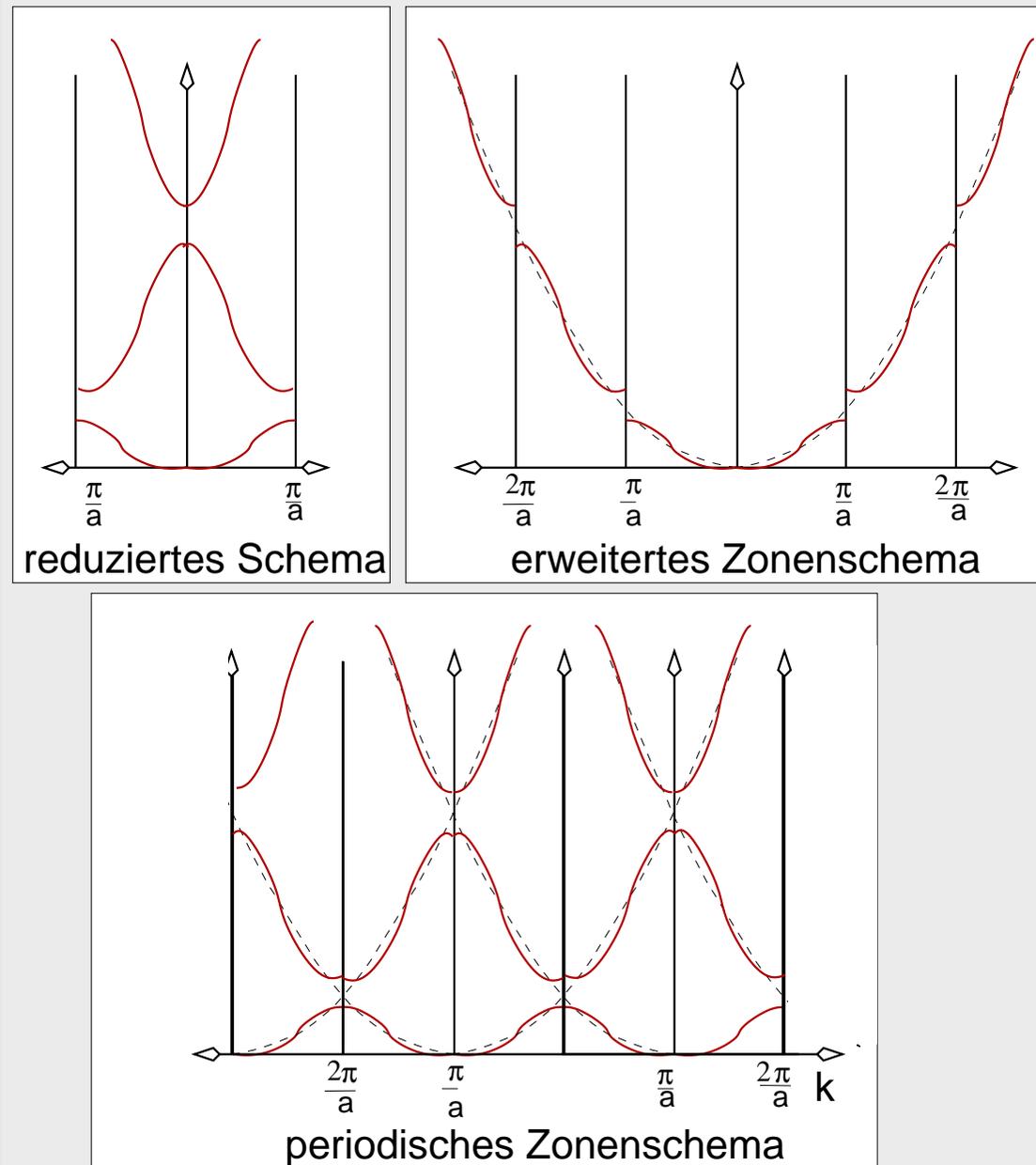
$$k \propto \frac{1}{\lambda}$$

- hat die Einheit einer reziproken Länge
- ist damit ein Vektor, der einen reziproken Raum (k-Raum) aufspannt
- der reziproke Raum ist zentrosymmetrisch

eindimensional, periodische Kernpotentiale (VL 6 Mitte)

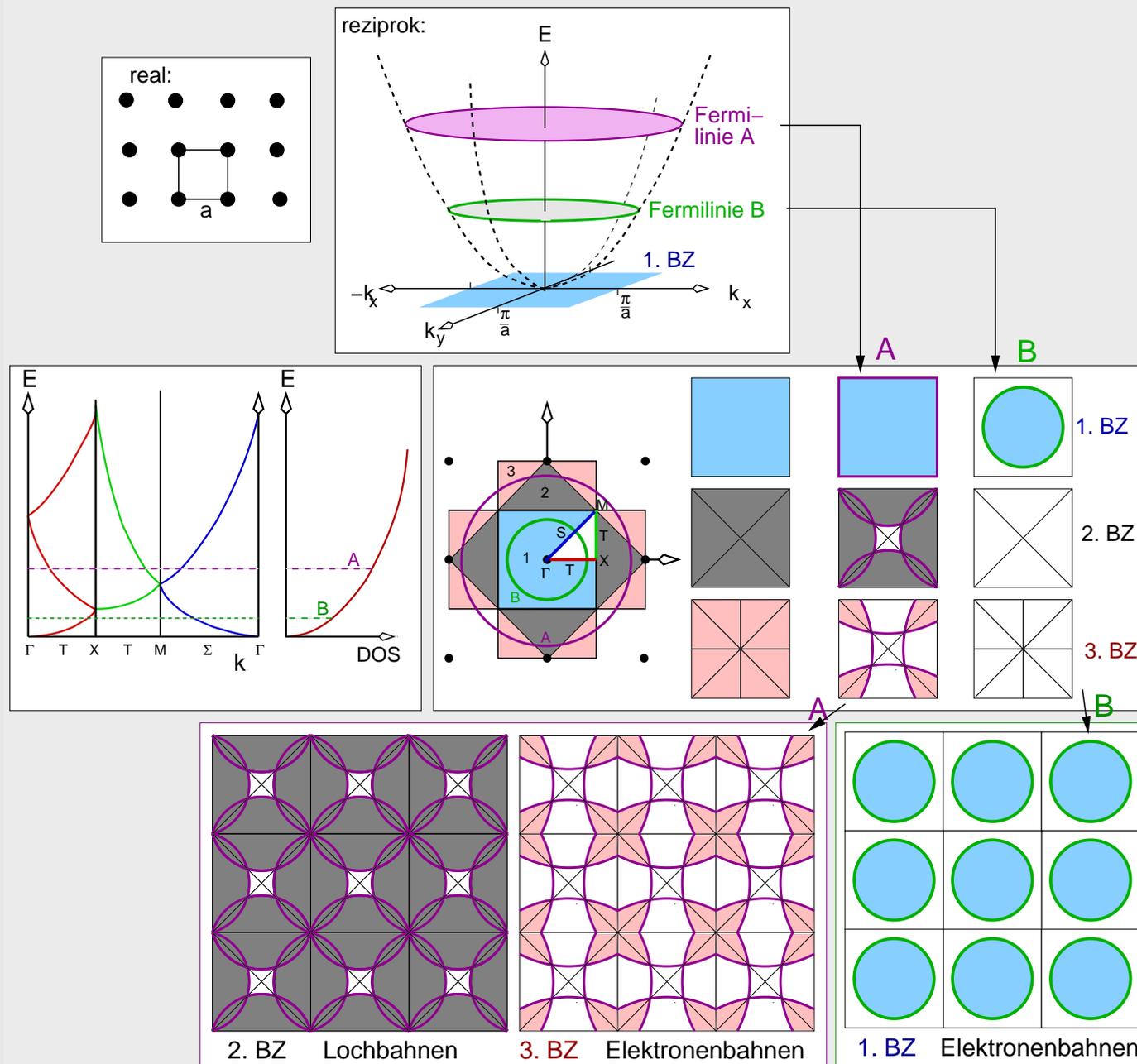


Unterschiedliche Darstellungen der Bandstruktur (VL 6 Mitte)

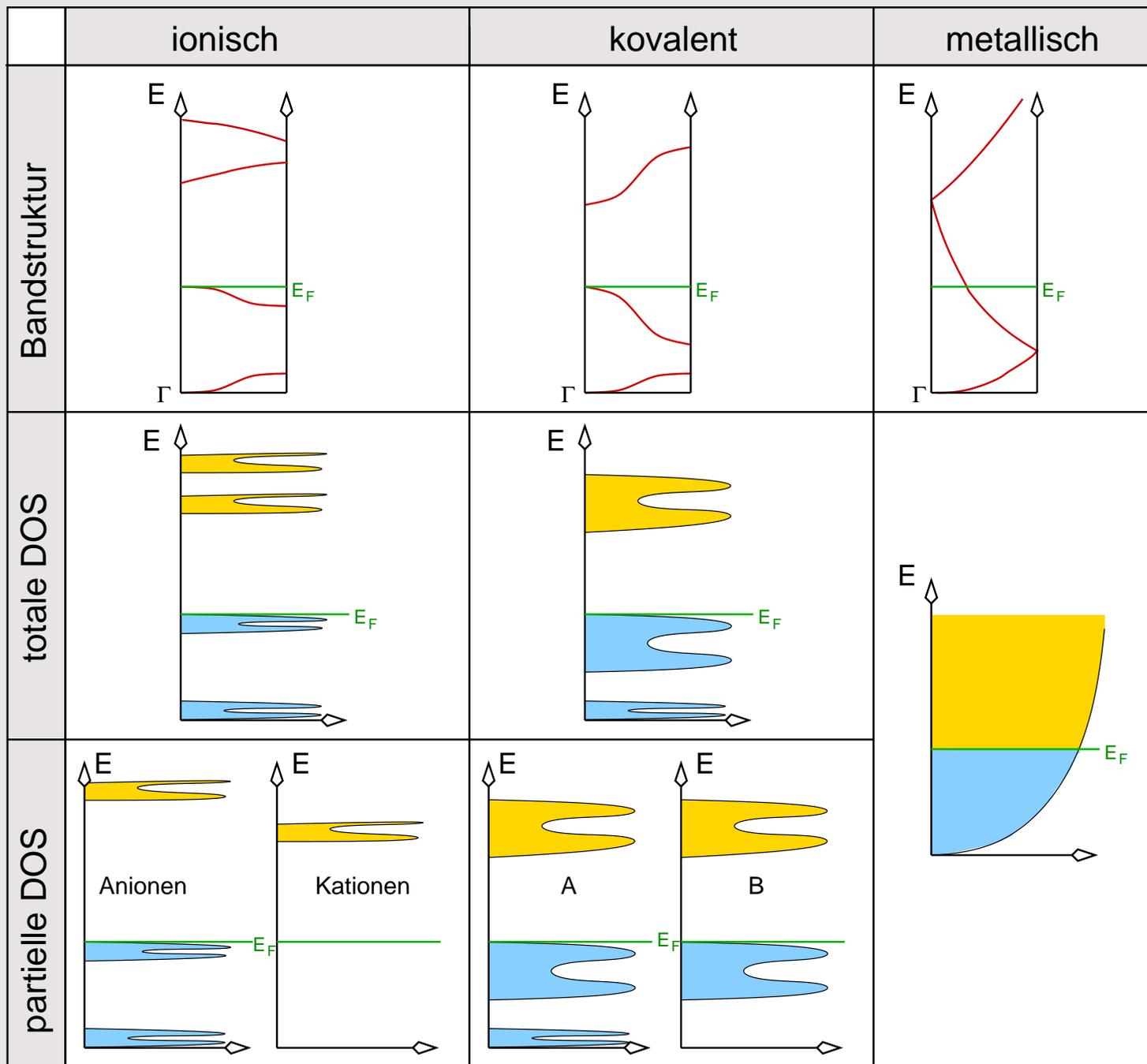


reduzierte Schema: Darstellung in der Wigner-Seitz-Zelle = 1. Brillouin-Zone (EZ des k -Raums)

zweidimensional, potentialfrei, periodische Kernanordnung (VL 6 unten)



Bindungstypen (Bandstruktur, tDOS, pDOS) (VL 7 oben)



- I. Einleitung, elektronische Strukturen von Festkörpern
- II. Rechenverfahren 
 - ◇ Übersicht über die verschiedenen Ansätze
 - ◇ Prinzip der FP-(L)APW-Methode
 - Dichtefunktional-Theorie
 - LDA-Näherung
 - Muffin-Tin/FP
 - LAPW
 - ◇ Programm Wien
 - Vorbereitung der Rechnung (Struct-Gen., NN, LSTART, DSTART)
 - SCF-Zyklen (LAPW0, LAPW1, LAPW2, MIXER)
 - Ergebnisse
 - totale und partielle DOS
 - BS
 - weitere Eigenschaften
- III. Beispiele

Ab-initio BS-Rechnungen: Gemeinsamkeiten aller Verfahren

- Parameterfrei
- Born-Oppenheimer-Näherung (Grundzustand, $T = 0$ K)

$$\hat{H} = \hat{T}_e + \hat{V}_{ee} + \hat{V}_{en}$$

- periodische Randbedingungen (Basisfunktionen sind Blochwellen):

$$\Psi_{\vec{k}} = u_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}r}$$

- Lösung des Eigenwertproblems der Energie

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

- Ansatz: Ψ als Linearkombinationen von Basisfunktionen

$$\psi_k = \sum_n c_n \phi_{k_n}$$

- SCF-Berechnung der Parameter c_n

Konzepte zur Lösung der Schrödinger-Gleichung im FK (VL 7 unten)

Behandlung des Festkörpers:

nichtperiodisch (Cluster)

periodisch (Elementarzelle)

Behandlung von Spins:

non-spinpolarized

spin polarized

(mit bestimmter magn. Ordnung)

Relativistik:

non relativistic

semi-relativistic

fully-relativistic

Basisfunktionen:

plane waves (PW)

augmented plane waves (APW)

atomic orbitals: Slater (STO), Gaussians (GTA)

LMTO

Schrödinger-Gleichung

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\nabla_{\vec{r}_i}^2}{m_e}}_{\hat{T}_e} + \underbrace{\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{\hat{V}_{ee}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^M \frac{Z_n e^2}{|\vec{r}_i - \vec{R}_n|}}_{\hat{V}_{en}} \right] \phi_i^k = \epsilon_i^k \phi_i^k$$

Austausch/Korrelations-Potential:

Hartree-Fock (HF) (+correlations)

Density functional theory (DFT)

Local density approximation (LDA)

Generalized gradient approximation (GGA)

LDA+U

Form des Potentials:

(non-)selfconsistent "Muffin-tin" (MT)

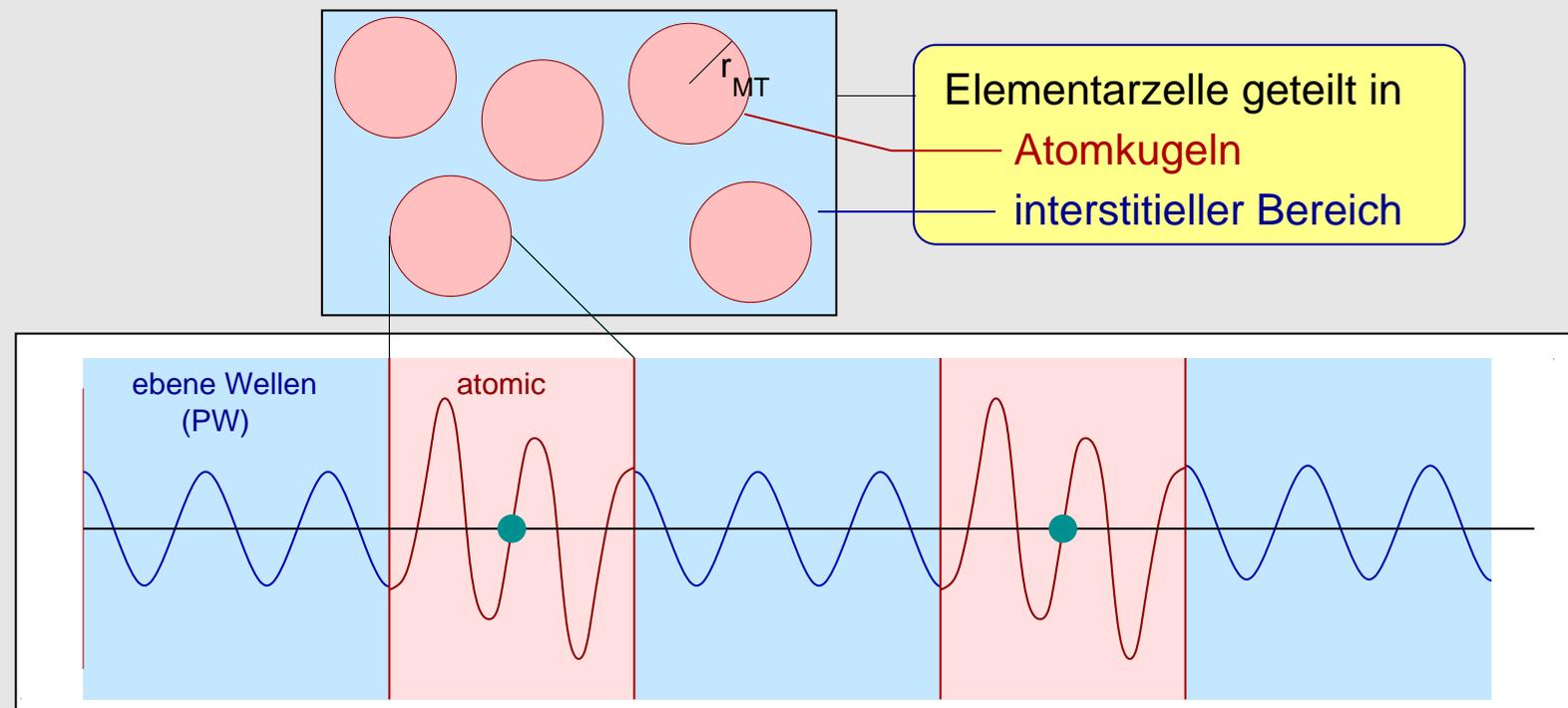
atomic sphere approximation (ASA)

full-potential (FP)

pseudopotential (PP)

Basisfunktionen

- ebene Wellen (plane waves, PW): sehr aufwendig, da extrem viele PW erforderlich
- Augmentation methods: Aufteilung des Raums in Kugeln um die Atome und interstitiellen Raum; ('Augmentierung' der Basisfunktionen am Kugelrand)
 - ◇ LMTO/ASA (überlappende Kugeln)
 - ◇ Muffin-Tin (nicht überlappende Kugeln)



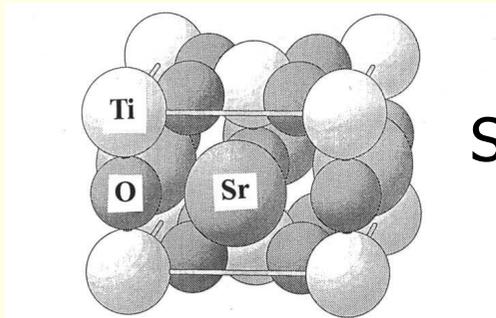
- reine LCAO-Methoden
 - ◇ EH-Methoden (nicht parameterfrei)
 - ◇ Configuration-Interaction (CI): Ψ sind LC von Slater-Determinanten (als BS-Methode extrem aufwendig)
 - ◇ Hartree-Fock (HF): Ψ sind Slater-Determinanten von Einteilchenfunktionen (für FK ungenau)

Basisfunktionen in WIEN

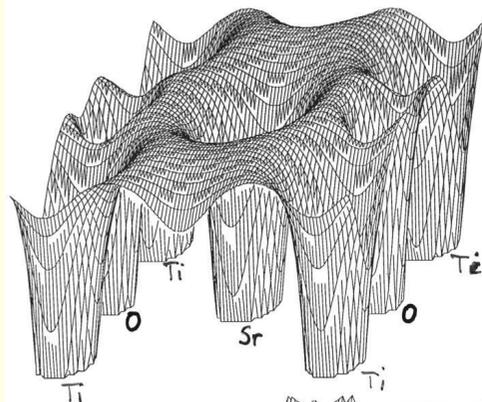
- MT: Teilung des Kristalls in nicht überlappende Kugeln:
 - ◇ außerhalb der Kugeln ebene Wellen (PW)
 - ◇ innerhalb der Kugeln: Einelektronenwellenfunktionen
 - mit radialem und Winkel-abhängigen Teil (FP)
 - nach Valenz- und Core-Zuständen differenziert



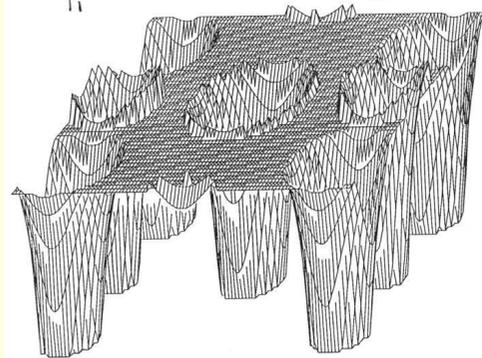
Full-potential in LAPW (A.Freeman et al)



SrTiO₃



Full potential



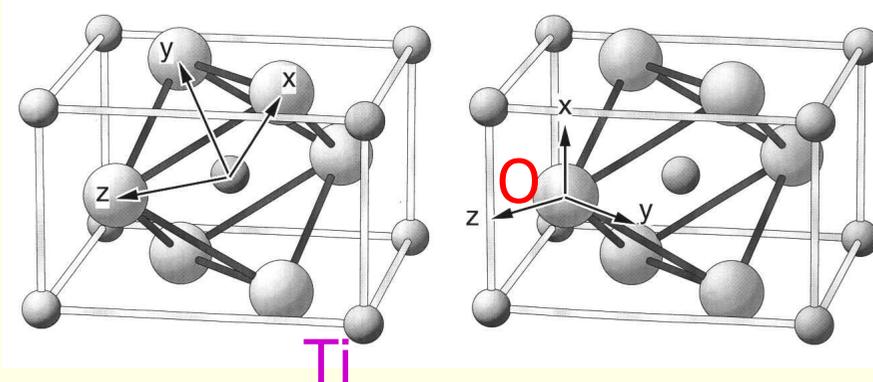
Muffin tin approximation

TiO₂ rutile

- The potential (and charge density) can be of general form (no shape approximation)

$$V(r) = \begin{cases} \sum_{LM} V_{LM}(r) Y_{LM}(\hat{r}) & r < R_a \\ \sum_K V_K e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} & r \in I \end{cases}$$

- Inside each atomic sphere a local coordinate system is used (defining LM)



DFT-Konzepte im Festkörper

Behandlung des Festkörpers:

nichtperiodisch (Cluster)

periodisch (Elementarzelle)

Behandlung von Spins:

non-spinpolarized

spin polarized

(mit bestimmter magn. Ordnung)

Relativistik:

non relativistic

semi-relativistic

fully-relativistic

Basisfunktionen:

plane waves (PW)

augmented plane waves (APW)

atomic orbitals: Slater (STO), Gaussians (GTA)

LMTO

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\nabla_{\vec{r}_i}^2}{m_e}}_{\hat{T}_0} + \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}^j)}{|\vec{r} - \vec{r}^j|} d\vec{r}^j}_{\hat{V}_H} + \underbrace{\frac{\delta V_{xc}[\rho]}{\delta \rho}}_{\hat{V}_{xc}} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^M \frac{Z_n e^2}{|\vec{r}_i - \vec{R}_n|}}_{\hat{V}_{en}} \right] \phi_i^k = \epsilon_i^k \phi_i^k$$

Austausch/Korrelations-Potential:

Hartree-Fock (HF) (+correlations)

Density functional theory (DFT)

Local density approximation (LDA)

Generalized gradient approximation (GGA)

LDA+U

Form des Potentials:

(non-)selfconsistent "Muffin-tin" (MT)

atomic sphere approximation (ASA)

full-potential (FT)

pseudopotential (PP)

Kohn-Sham-Gleichungen

- Theorem von Hohenberg/Kohn (1964) und Kohn/Sham (1965):
- Die exakte Grundzustandsdichte eines Systems aus N-Elektronen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \psi_i(\vec{r})^* \psi_i(\vec{r})$$

- ergibt sich, wenn die Einteilchenwellenfunktionen diejenigen N der energetisch niedrigsten Lösungen der Kohn-Sham-Gleichung $H_{KS}^{\hat{}} \psi_i = \epsilon_i \psi_i$ sind.

- Der Operator $H_{KS}^{\hat{}}$

$$H_{KS}^{\hat{}} = \hat{T}_o + \hat{V}_H + \hat{V}_{xc} + V_{ext}^{\hat{}}$$

- hängt wegen

$$\hat{V}_H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad \text{bzw.} \quad V_{ext}^{\hat{}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{e^2 Z_i}{|\vec{R}_i - \vec{r}_j|} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{e^2 Z_i Z_j}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|}$$

- nur ab von der Elektronendichte und dem Austauschkorrelations-Potential V_{xc} :

$$\hat{V}_{xc} = \frac{\delta V_{xc}[\rho]}{\delta \rho}$$

Lokale Dichtenäherung (LDA)

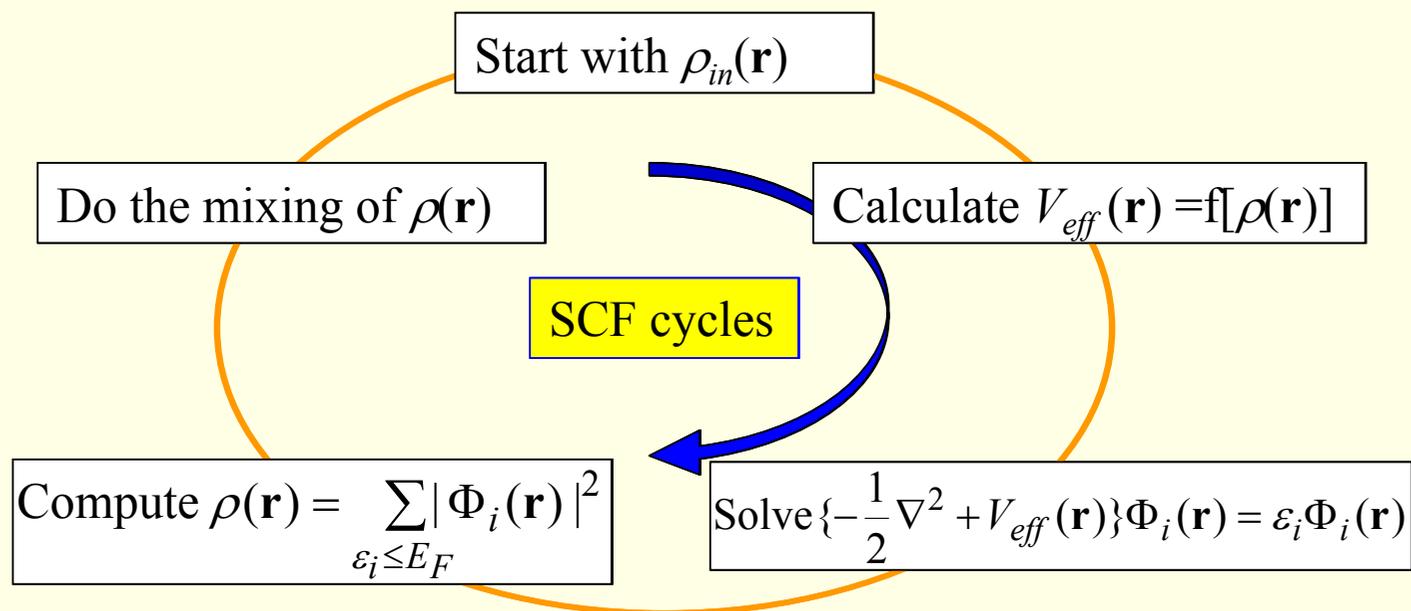
- Annahmen für V_{xc} ,
- die sich aus der Tatsache ergeben,
- daß sich die Elektronendichte räumlich nur langsam ändert.



Self-consistent field (SCF) calculations



- In order to solve $H\Psi = E\Psi$ we need to know the potential $V(r)$
- for $V(r)$ we need the electron density $\rho(r)$
- the density $\rho(r)$ can be obtained from $\Psi(r) \cdot \Psi(r)$
- ?? $\Psi(r)$ is unknown before $H\Psi = E\Psi$ is solved ??





(L)APW methods



APW + local orbital method
(linearized) augmented plane wave method

Total wave function $\Psi_k = \sum_{K_n} C_{k_n} \phi_{k_n}$ n...50-100 PWs /atom

Variational method:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad \frac{\delta \langle E \rangle}{\delta C_{k_n}} = 0$$

upper bound

minimum

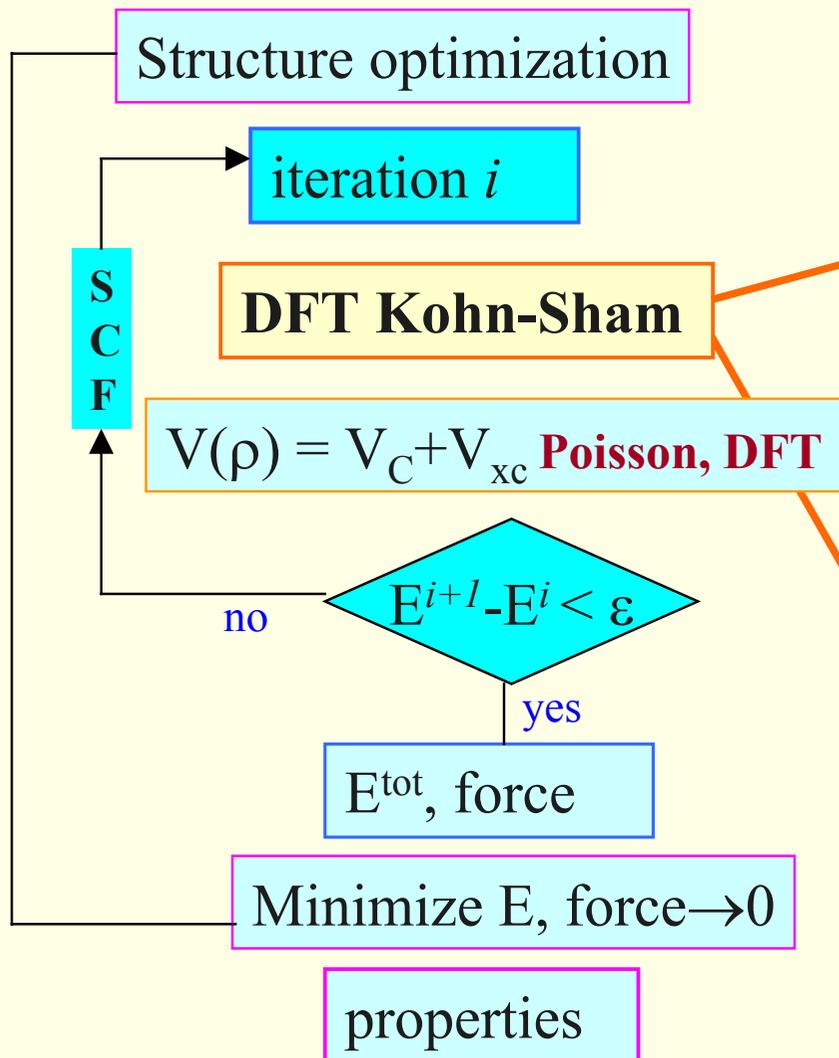
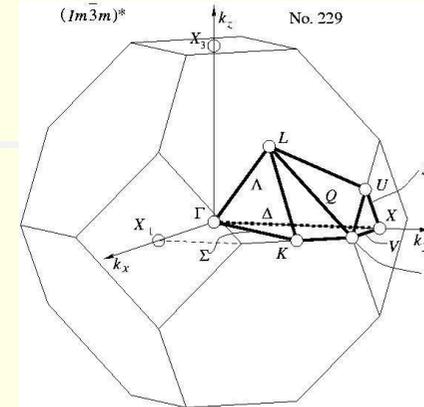
Generalized eigenvalue problem: $H C = E S C$

Diagonalization of (real or complex) matrices of size 10.000 to 50.000 (up to 50 Gb memory)



Structure: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, R_\alpha, \dots$

unit cell atomic positions



$\mathbf{k} \in \text{IBZ}$ (irred. Brillouin zone)

Kohn Sham

$$[-\nabla^2 + V(\rho)]\psi_k = E_k \psi_k$$

$$\psi_k = \sum_{k_n} C_{k_n} \Phi_{k_n}$$

Variational method $\frac{\delta \langle E \rangle}{\delta C_{k_n}} = 0$

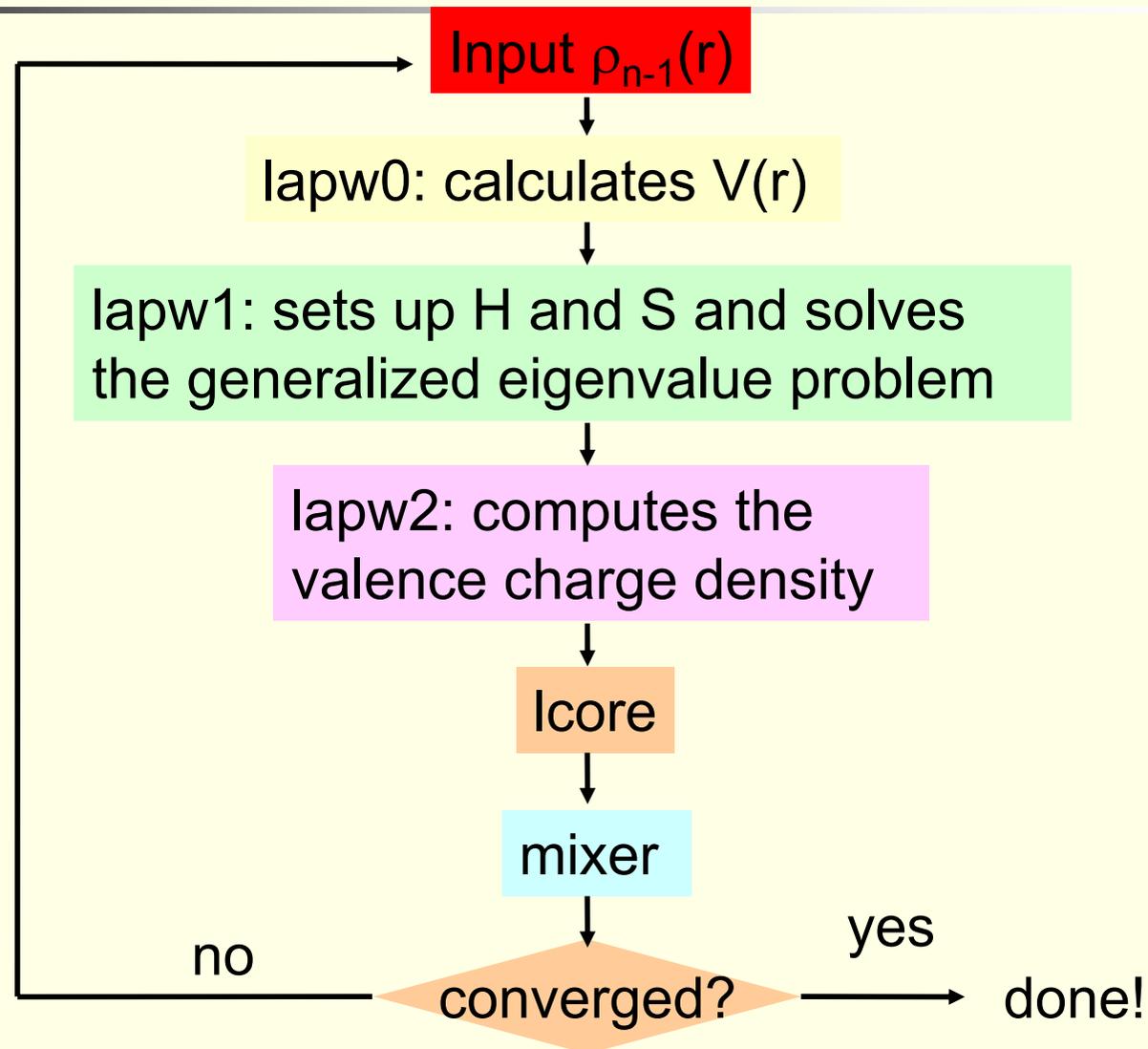
Generalized eigenvalue problem

$$HC = ESC$$

$$\rho = \sum_{E_k \leq E_F} \psi_k^* \psi_k$$



Flow Chart of WIEN2k (SCF)



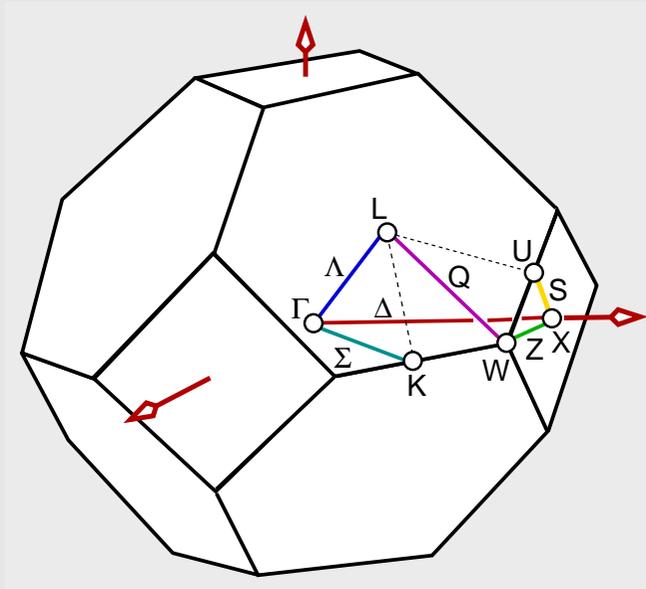
Rechnung: Selbstkonsistenz-Verfahren (Raleigh-Ritz-Variationsverfahren)

- Wahl der Basisfunktionen (LSTART und KGEN)
- Berechnung der Startdichte (DSTART)
- Berechnung des Operator H_{KS}^{\wedge} aus dieser Dichte (LAPW0)
- Lösung des Eigenwertproblems mit H_{KS}^{\wedge} (LAPW1)
- Berechnung der neuen Valenzzustands-Dichte $\rho_{val,neu}$ (LAPW2)
- Addition von ρ_{val} und ρ_{core}
- Vergleich von ρ_{neu} und ρ_{alt} (Mixer)
- Test auf Selbstkonsistenz (Charge distance)
- ggf. neuer Beginn bei 3.

- Methode: TB-FP-LAPW-DFT-Verfahren mit LDA- bzw. GGA-Näherung
- Autoren: Peter Blaha, Karlheinz Schwarz, Joachim Luitz
- Code: Fortran mit Unix-Skripten
- Web-Frontend
- Tools: XcrySDen (Tone Kokalj) ermöglicht
 - ◇ Strukturdarstellungen
 - ◇ Bestimmung von k-Pfaden für die Bandstruktur
 - ◇ Elektronendichten
 - ◇ Fermiflächen

Übersicht

- I. Einleitung: Elektronische Strukturen von Festkörpern
- II. Rechenverfahren
- III. Beispiele \leftarrow (VL 8)
 - ◇ alle kubisch flächenzentriert



- ◇ unterschiedliche Bindungstypen
- ◇ Beispiele
 - Ca ($Fm\bar{3}m$, fcc, Metall)
 - CaO ($Fm\bar{3}m$, NaCl; Salz)
 - GaAs ($F\bar{4}3m$, Zinkblende; kovalenter FK)

Beispiel Ca: Input I

- File ca.struct

```
Ca, fcc
F LATTICE,NONEQUIV. ATOMS: 1 225 Fm-3m
MODE OF CALC=RELA
 10.605147 10.605147 10.605147 90.000000 90.000000 90.000000
ATOM= 1: X=0.00000000 Y=0.00000000 Z=0.00000000
      MULT= 1 ISPLIT= 2
Ca1 NPT= 781 R0=0.00005000 RMT= 3.0000 Z: 20.0
LOCAL ROT MATRIX: 1.0000000 0.0000000 0.0000000
                  0.0000000 1.0000000 0.0000000
                  0.0000000 0.0000000 1.0000000

 48 NUMBER OF SYMMETRY OPERATIONS
 1 0 0 0.0000000
 0-1 0 0 0.0000000
.....
```

- File ca.in0

```
TOT 13 (5...CA-LDA, 13...PBE-GGA, 14...PW2-GGA)
NR2V (R2V)
```

Beispiel Ca: Input II

- File ca.inst

```
Ca 1
Ar 1 5
4,-1,1.0 N
4,-1,1.0 N
****      End of Input
```

- File ca.in1

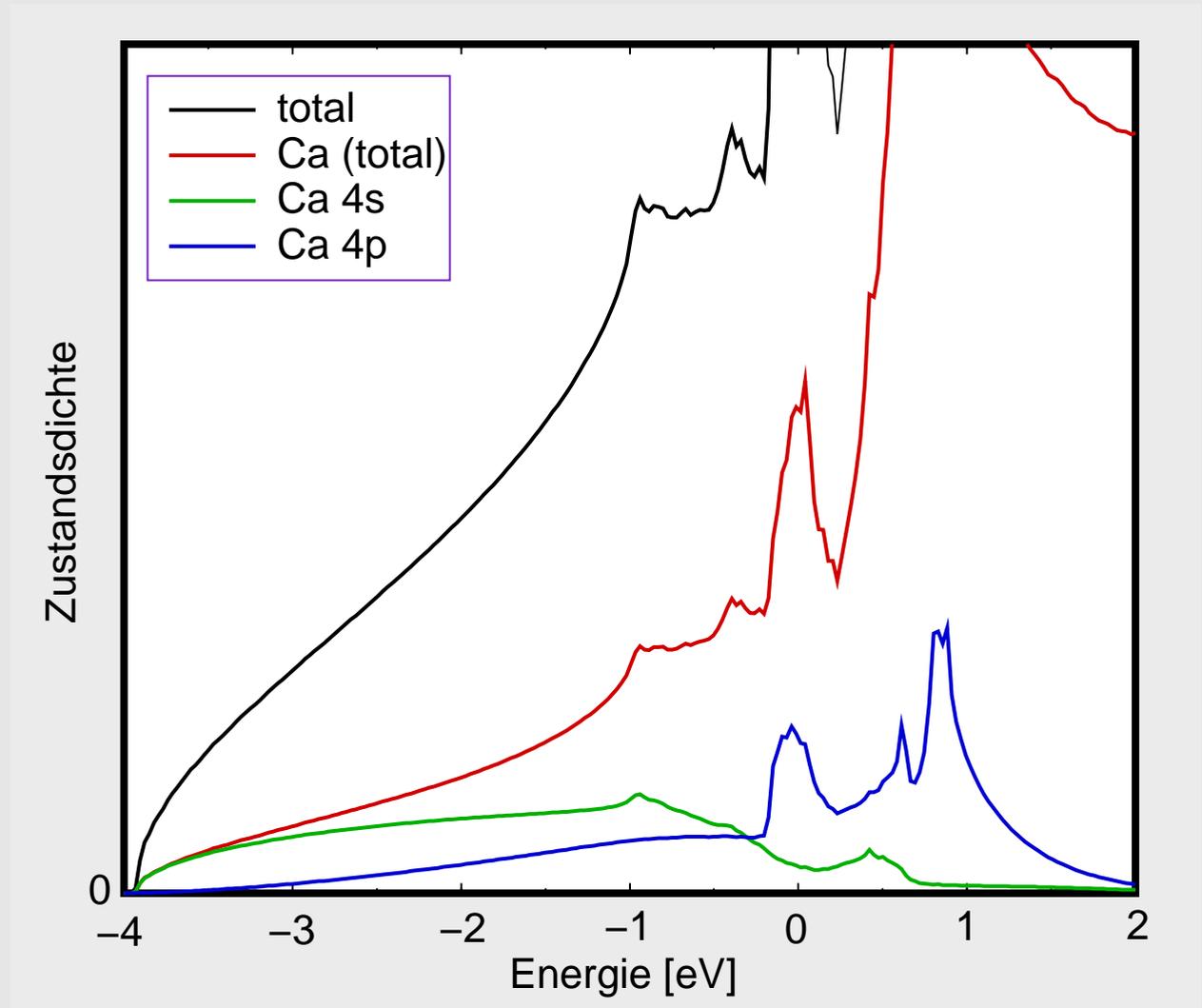
```
WFFIL          (WFPRI, SUPWF)
 8.00          10      4 (R-MT*K-MAX; MAX L IN WF, V-NMT
 0.30         4          (GLOBAL E-PARAMETER WITH n OTHER CHOICES)
0   0.30       0.000 CONT
0  -3.16       0.005 STOP
1  -1.75       0.010 CONT
1   0.30       0.000 CONT
K-VECTORS FROM UNIT:4      -7.0      1.5      emin/emax window
```

- Interaktiv

- ◇ Zahl der k-Punkte (gesamt BZ): 25000

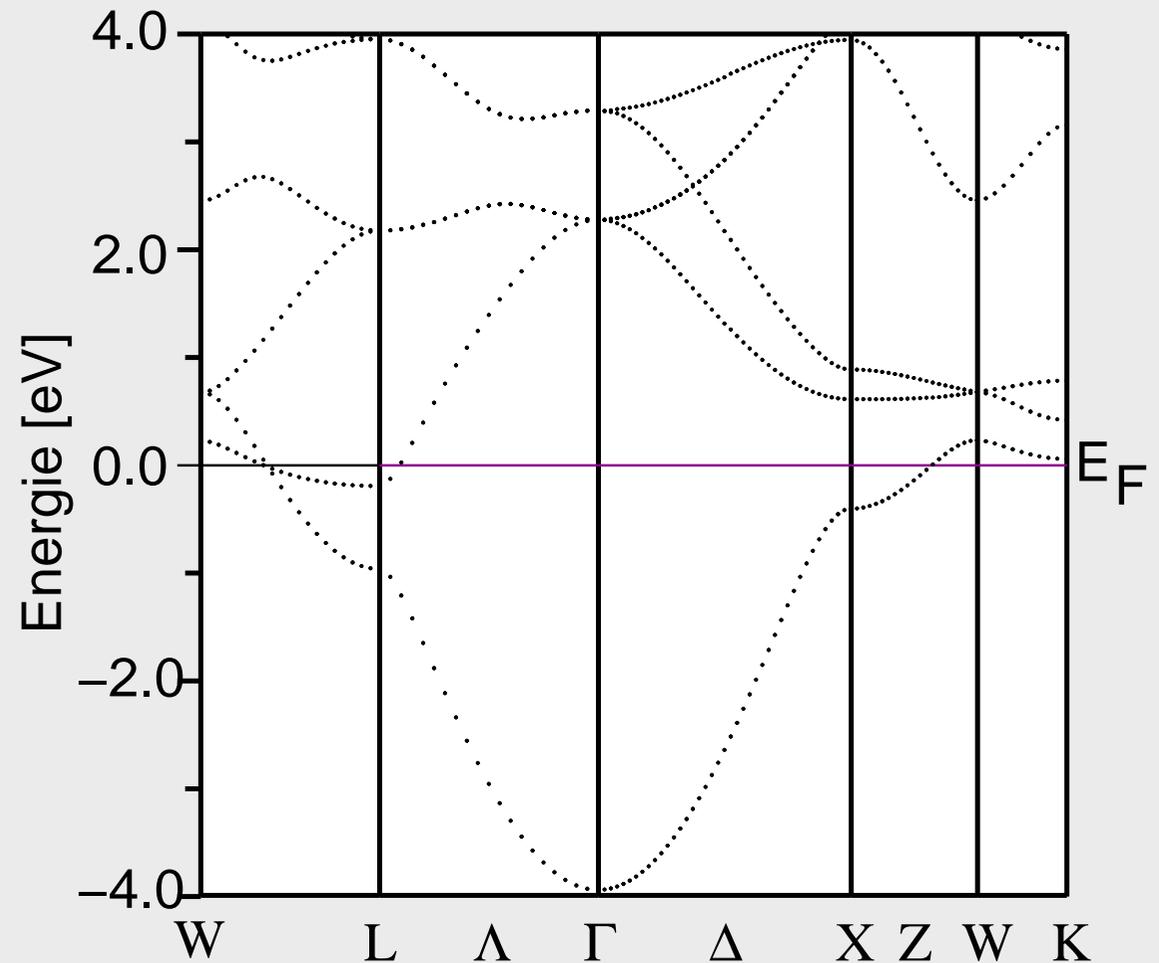
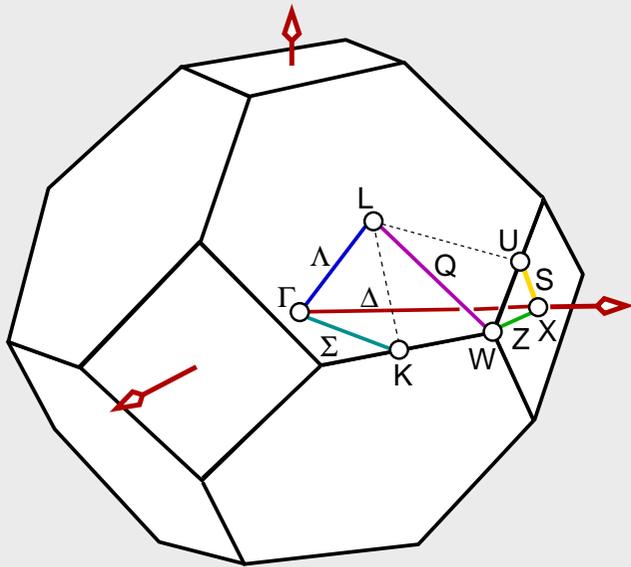
Beispiel Ca: Zustandsdichten

- totale = partielle DOS von Ca
- keine Bandlücke
- große Dispersionen
- 4s fast vollst. besetzt
- Überlappung von 4s und 4p



Beispiel Ca: Bandstruktur

- große Dispersionen
- keine Bandlücke
- 4s besetzt, von Γ steigend
- 4p schwach besetzt
- $E \sim k^2$ für s Unterkante
- $E \sim -k^2$ für s Oberkante
- spezielle k-Punkte:



Beispiel CaO: Input I

- File cao.struct

```
CaO
F LATTICE,NONEQUIV. ATOMS: 2 225 Fm-3m
MODE OF CALC=RELA
 9.068799 9.068799 9.068799 90.000000 90.000000 90.000000
ATOM= 1: X=0.00000000 Y=0.00000000 Z=0.00000000
      MULT= 1 ISPLIT= 2
Ca1 NPT= 781 R0=0.00005000 RMT= 2.0000 Z: 20.0
LOCAL ROT MATRIX: 1.0000000 0.0000000 0.0000000
                  0.0000000 1.0000000 0.0000000
                  0.0000000 0.0000000 1.0000000
ATOM= 2: X=0.50000000 Y=0.50000000 Z=0.50000000
      MULT= 1 ISPLIT= 2
O 1 NPT= 781 R0=0.00010000 RMT= 2.1000 Z: 8.0
LOCAL ROT MATRIX: 1.0000000 0.0000000 0.0000000
                  0.0000000 1.0000000 0.0000000
                  0.0000000 0.0000000 1.0000000

 48 NUMBER OF SYMMETRY OPERATIONS
 1 0 0 0.0000000
.....
```

Beispiel CaO: Input II

- File cao.in0

```
TOT    13      (5...CA-LDA, 13...PBE-GGA, 14...PW2-GGA)
NR2V      (R2V)
```

- File cao.inst

```
Ca 1
Ar 1 5
4,-1,1.0 N
4,-1,1.0 N
O 1
He 3 5
2,-1,1.0 N
2,-1,1.0 N
2, 1,1.0 N
2, 1,1.0 N
2,-2,2.0 N
2,-2,0.0 N
****      End of Input
```

Beispiel CaO: Input III

- File cao.in1

```
TOT          (TOT, FOR, QTL, EFG, FERMI )
      -9.0    16.0          EMIN, NE
TETRA    0.000          (GAUSS, ROOT, TEMP, TETRA, ALL      eval)
  0 0 4 0 4 4 6 0 6 4
  0 0 4 0 4 4 6 0 6 4
 10.          GMAX
FILE          FILE/NOFILE  write recprlist
```

- Interaktiv

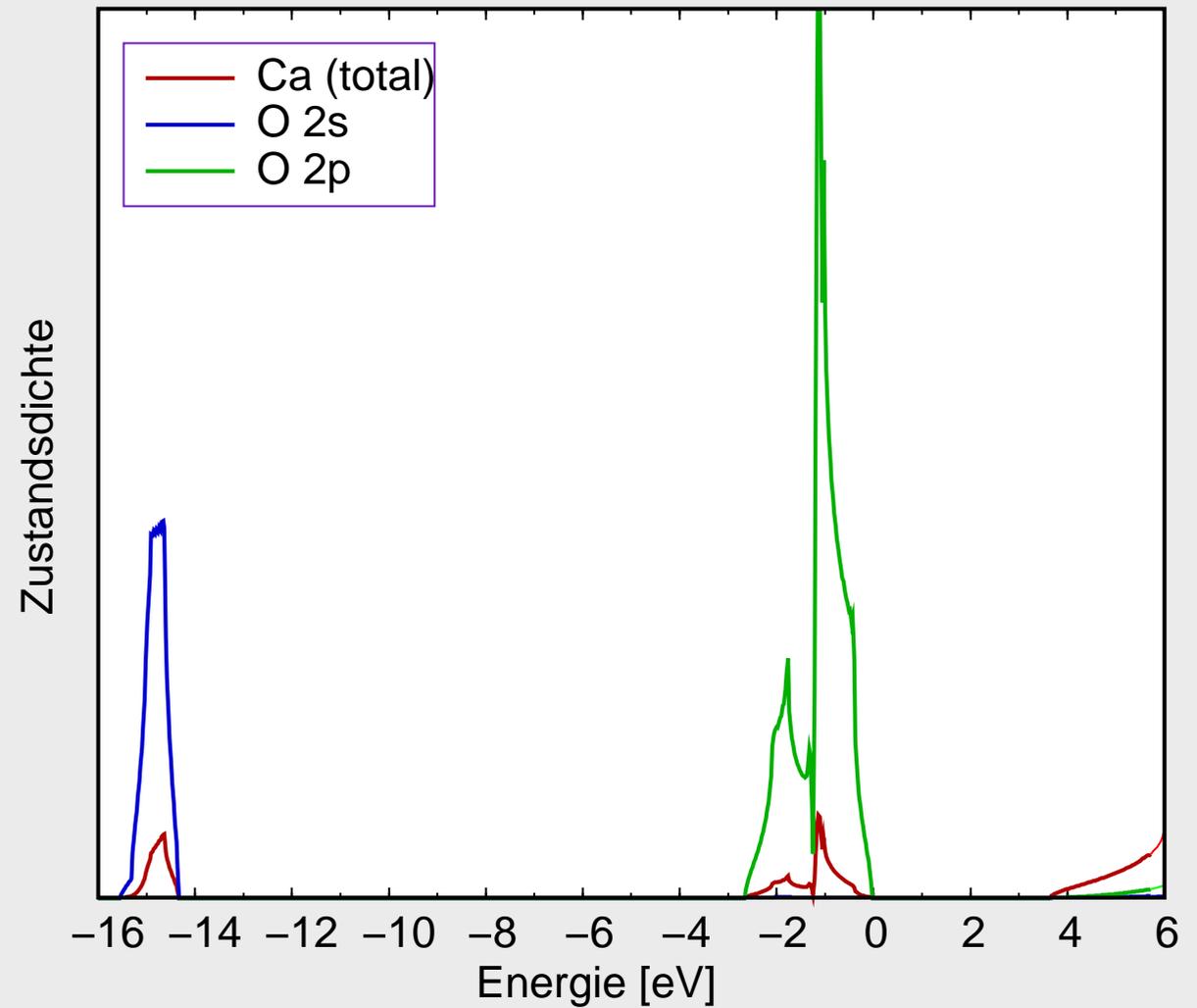
- ◇ Zahl der k-Punkte (gesamte BZ): 25000

- Rechenzeit (1 Proz. Pentium mit 1 GHz)

- ◇ ca. 20 min. (6 SCF-Zyklen)

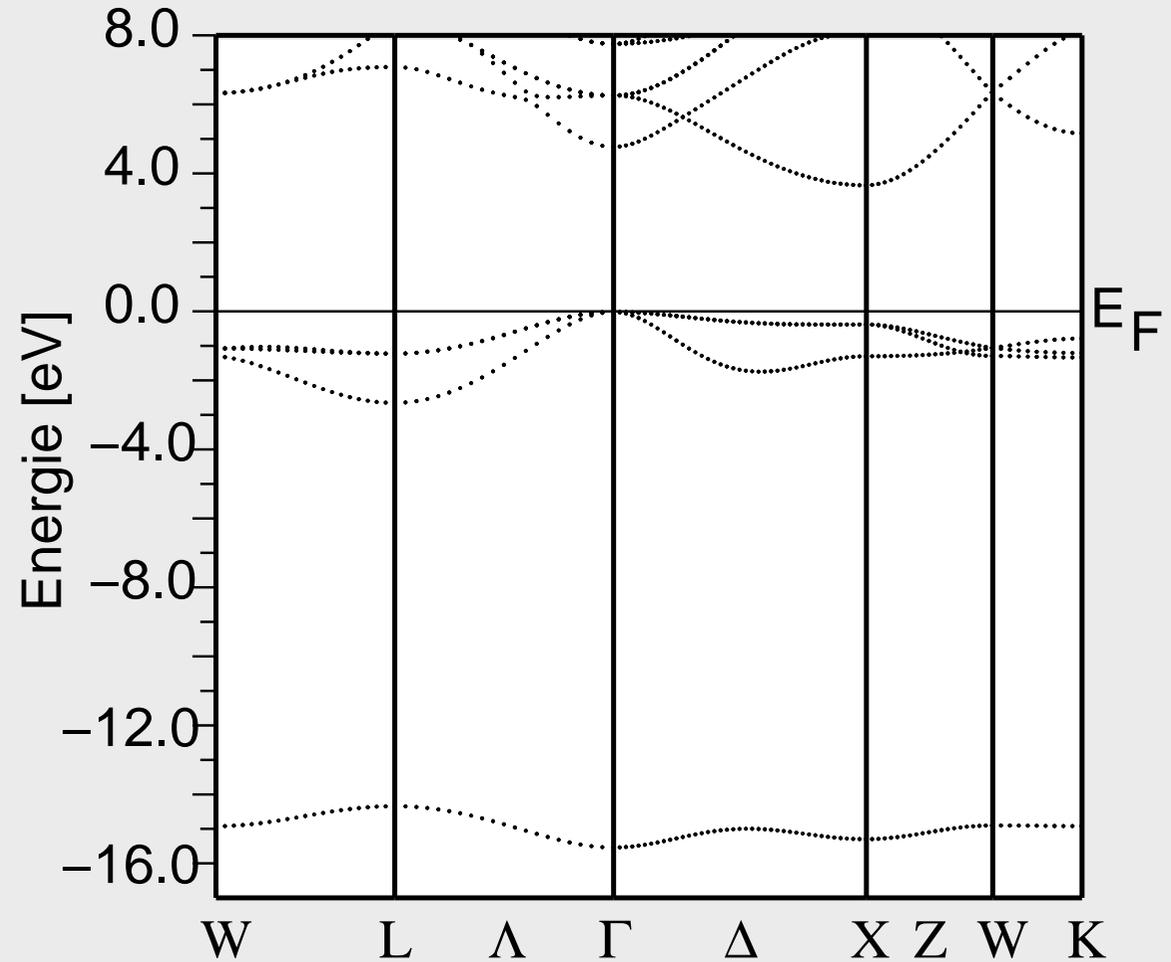
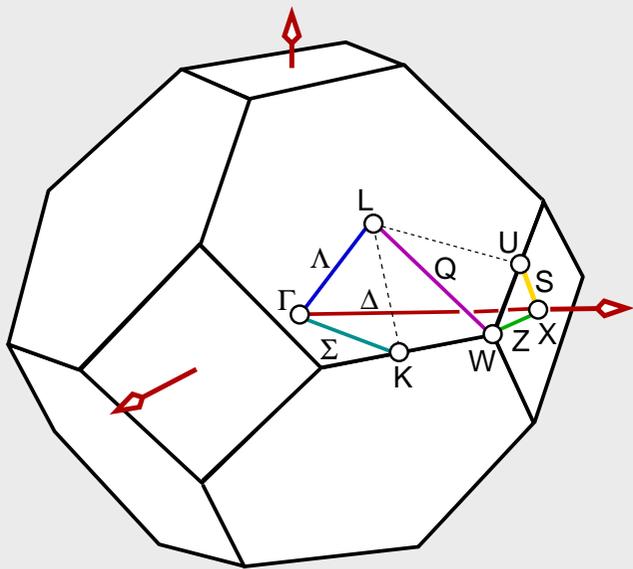
Beispiel CaO: Zustandsdichten

- O 2s und 2p besetzt
- VB mit O-2p Charakter
- LB: Ca-Zustände
- BL: 3.8 eV



Beispiel CaO: Bandstruktur

- kleine Dispersionen
- indirekte BL: 3.8 eV
- optische BL: 4.8 eV
- optische BL_{exp} : 7.0 eV
- VB: O-2p-Charakter
- LB-Charakter = f(k-Raum)
- 1. BZ und spezielle k-Punkte:



Beispiel GaAs: Input I

- File gaas.struct

```
GaAs
F LATTICE,NONEQUIV. ATOMS: 2 216 F-43m
MODE OF CALC=RELA
 10.408616 10.408616 10.408616 90.000000 90.000000 90.000000
ATOM= 1: X=0.00000000 Y=0.00000000 Z=0.00000000
      MULT= 1 ISPLIT= 2
Ga1 NPT= 781 R0=0.00005000 RMT= 2.1000 Z: 31.0
LOCAL ROT MATRIX: 1.0000000 0.0000000 0.0000000
                  0.0000000 1.0000000 0.0000000
                  0.0000000 0.0000000 1.0000000
ATOM= 2: X=0.25000000 Y=0.25000000 Z=0.25000000
      MULT= 1 ISPLIT= 2
As1 NPT= 781 R0=0.00005000 RMT= 2.1000 Z: 33.0
LOCAL ROT MATRIX: 1.0000000 0.0000000 0.0000000
                  0.0000000 1.0000000 0.0000000
                  0.0000000 0.0000000 1.0000000

 24 NUMBER OF SYMMETRY OPERATIONS
 1 0 0 0.0000000
.....
```

- File gaas.in0

```
TOT 13 (5...CA-LDA, 13...PBE-GGA, 14...PW2-GGA)
NR2V (R2V)
```

Beispiel GaAs: Input II

- File gaas.inst

```
Ga 1
Ar 4 5
3, 2,2.0 N
3, 2,2.0 N
3,-3,3.0 N
3,-3,3.0 N
4,-1,1.0 N
4,-1,1.0 N
4, 1,1.0 N
4, 1,0.0 N
As 1
Ar 5 5
3, 2,2.0 N
3, 2,2.0 N
3,-3,3.0 N
3,-3,3.0 N
4,-1,1.0 N
4,-1,1.0 N
4, 1,1.0 N
4, 1,0.0 N
4,-2,2.0 N
4,-2,0.0 N
****      End of Input
```

Beispiel GaAs: Input III

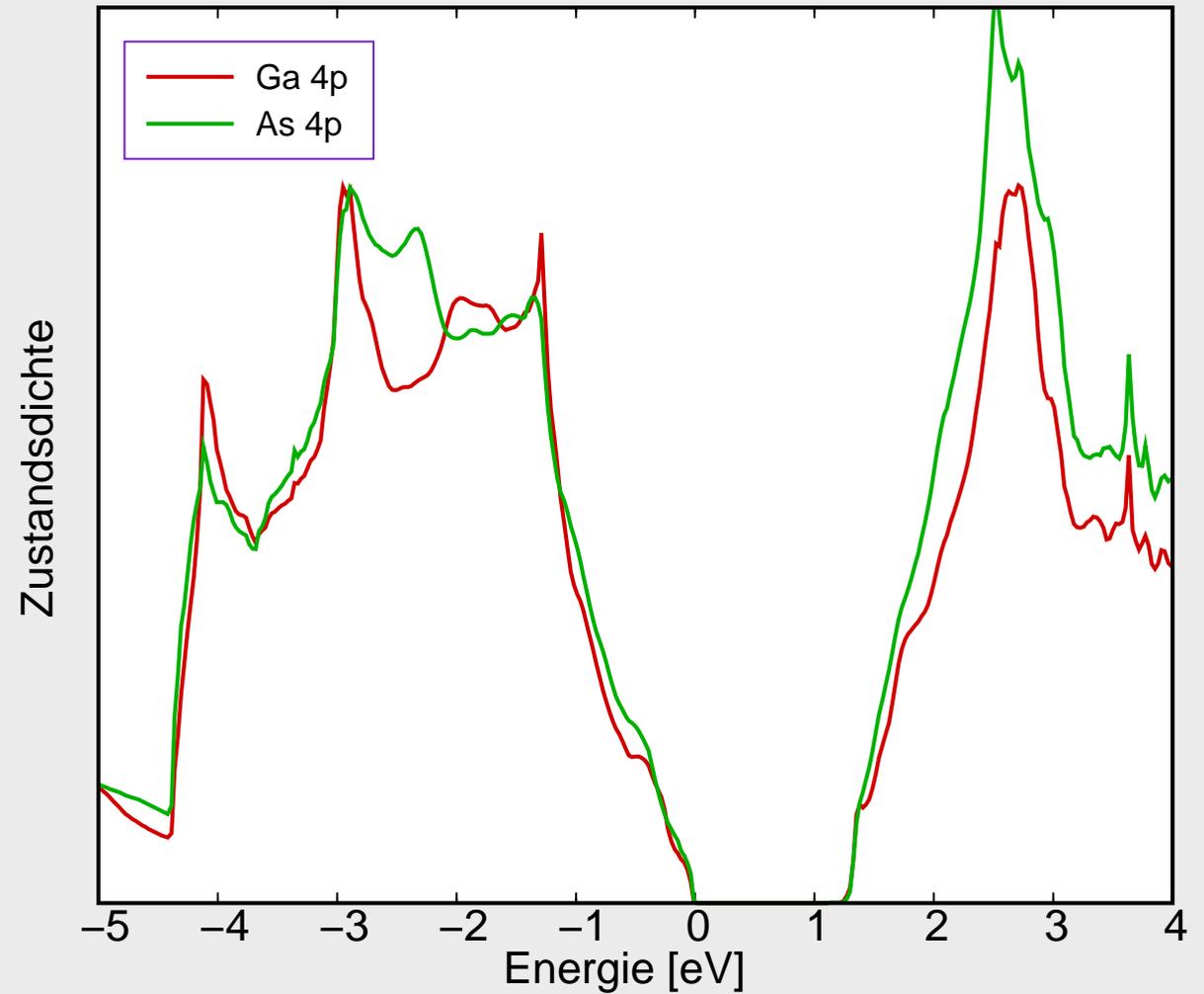
- File gaas.in1

```
WFFIL          (WFPRI, SUPWF)
 8.00          10      4 (R-MT*K-MAX; MAX L IN WF, V-NMT
 0.30          4      (GLOBAL E-PARAMETER WITH n OTHER CHOICES)
0  0.30        0.000 CONT
0 -3.16        0.005 STOP
1 -1.75        0.010 CONT
1  0.30        0.000 CONT
 0.30          3      (GLOBAL E-PARAMETER WITH n OTHER CHOICES)
0 -1.55        0.010 CONT
0  0.30        0.000 CONT
1  0.30        0.000 CONT
K-VECTORS FROM UNIT:4    -7.0      1.5      emin/emax window
```

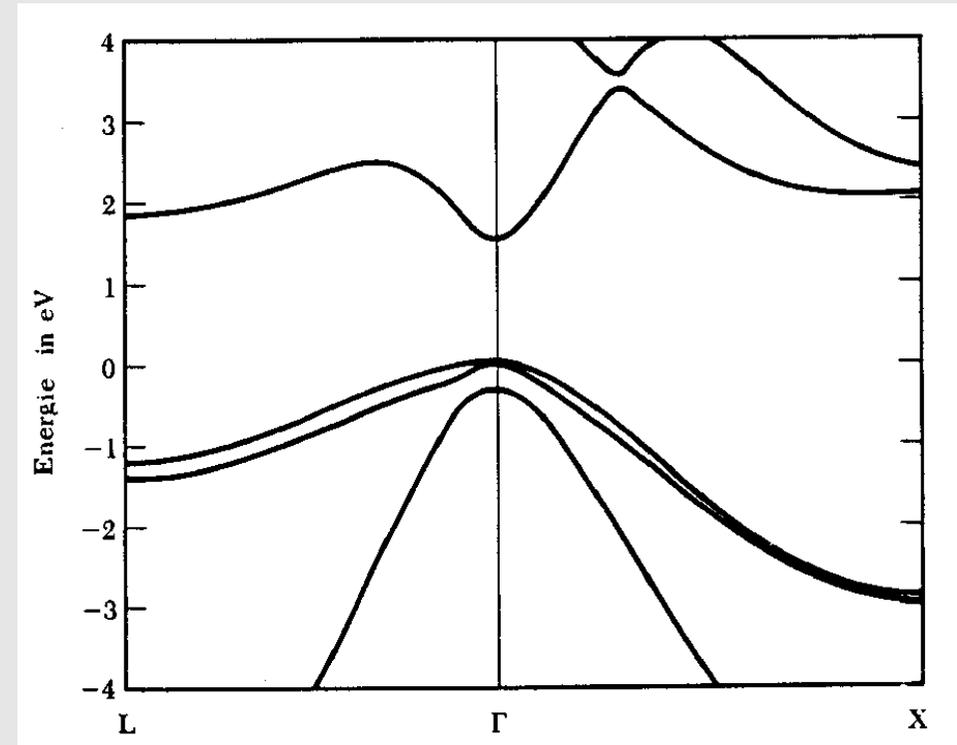
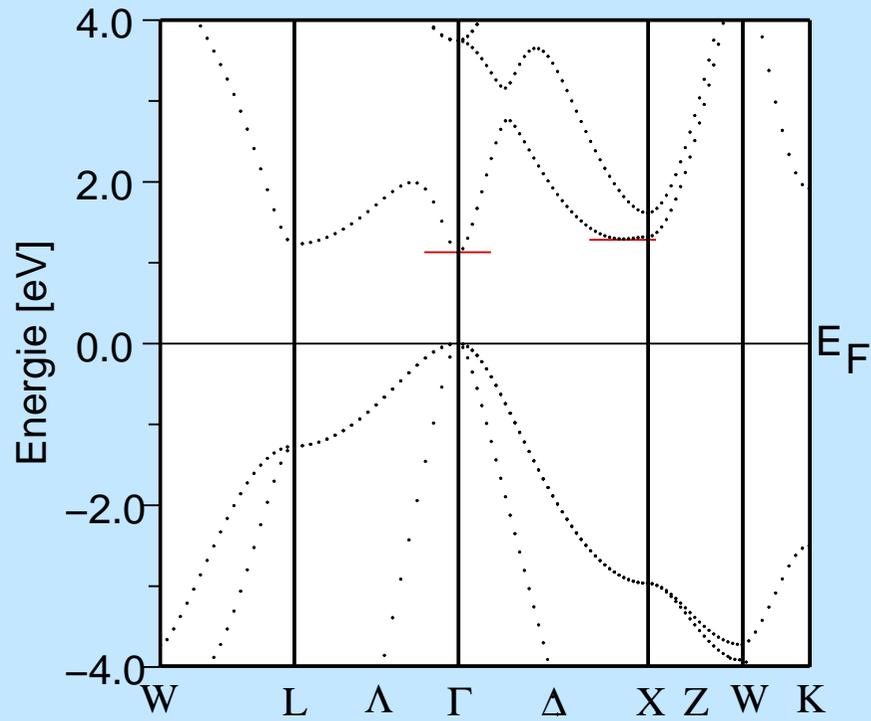
- Interaktiv
 - ◇ Zahl der k-Punkte (gesamt BZ): 25000
- Rechenzeit (1 Proz. Pentium mit 1 GHz)
 - ◇ ca. 120 min. (7 SCF-Zyklen)

Beispiel GaAs: Zustandsdichten

- Bandlücke 1.3 eV
- VB mit mittlerer Dispersion
- Ga-4s bei ca. -15 eV
- As-4s bei ca. -12 eV
- Überlappung mit 4p von As/Ga
- kovalente Bindung



Beispiel GaAs: Bandstruktur (Vergleich mit Literatur)



Zusammenfassung

- Basics elektronischer Strukturen kristalliner Festkörper
- WIEN2k
 - ◇ ermöglicht
 - ab-initio (parameterfrei)
 - auf relativ hohem Niveau (DFT, APW, FP)
 - mit relativ geringer Rechenpower (1 Proz., 2 GHz, 2G)
 - einigermaßen schnell
 - relativ einfach (Frontend) und
 - für kleine bis mittelgroße Systeme
 - ◇ die Bestimmung (und die Darstellung) von
 - Bandstrukturen inkl. FAT-Band-Plots
 - Zustandsdichten, tDOS und pDOS
 - Elektronendichten
 - Bader-Analysen (AIM)
 - EFG, optischen Eigenschaften, ELNES, Röntgenspektren, usw.
- Beispiele für typische Festkörper mit unterschiedlicher chemischer Bindung
 - ◇ Ca
 - ◇ CaO
 - ◇ GaAs